2.5.1 Zvětšujeme, zmenšujeme

Předpoklady: 020504

Př. 1: Škodlivý motýl bekyně mniška, jehož larvy se živí jehlicemi smrků a borovic je zajímavý také tím, že se u něj mění poměr mezi samičkami a samci. Za normální situace je více samiček v poměru $6:4$, v případě kalamity však roste podíl samečků tak, že na jejím konci se poměr obrátí na $4:6$.
a) Kolik samiček a kolik samečků můžeme očekávat za normální situace mezi 150 chycenými motýly?
b) Mezi 80 chycenými motýly bylo 45 samečků? Nastala kalamita? Blíží se její konec?
c) Kolik motýlů musíme za normálních okolností chytit, abychom měli 15 samiček?
d) Kolik motýlů musíme na konci kalamity chytit, abychom měli 35 samečků?

a) Kolik samiček a kolik samečků můžeme očekávat za normální situace mezi 150 chycenými motýly?
Poměr samičky : samečci - $6:4=3:2$ $\Rightarrow$ pět dílů … 150 motýlů.
jeden díl … $150:5=30$ motýlů.
Samičky 3 díly … $30\cdot 3=90$ motýlů.
Samečci 2 díly … $30\cdot 2=60$ motýlů.
Mezi 150 chycenými motýly bude přibližně 90 samiček a 60 samečků.

b) Mezi 80 chycenými motýly bylo 45 samečků? Nastala kalamita? Blíží se její konec?
Na první pohled je vidět, že počet samečků je větší než počet samiček $\Rightarrow$ nastala kalamita.¨
Hodnota poměru samečci : samičky: $45:35=9:7=1,28...$ $\Rightarrow$ hodnota poměru se blíží hodnotě na konci kalamity ($3:2=1,5$) konec kalamity se zřejmě již blíží.

c) Kolik motýlů musíme za normálních okolností chytit, abychom měli 15 samiček?
Poměr samičky : samečci - $6:4=3:2$ (normální stav).
15 samiček … 3 díly.
jeden díl … $15:3=5$ motýlů.
Motýli celkem 5 dílů … $5\cdot 5=25$ motýlů.
Abychom měli 15 samiček musíme za normálních okolností chytit přibližně 25 motýlů.

d) Kolik motýlů musíme na konci kalamity chytit, abychom měli 35 samečků?
Poměr samičky : samečci - $4:6=2:3$ (konec kalamity).
35 samečků … 3 díly.
jeden díl … $35:3=\frac{35}{3}$ motýlů.
Motýli celkem 5 dílů … $5\cdot\frac{35}{3}=\frac{175}{3}$, $\begin{array}{l}175:3=58,\overline{3}\\ \ 25\\ \ \ 10\\ \ \ \ 1\end{array}$ motýlů.
Abychom měli 35 samečků musíme konci kalamity chytit přibližně 58 motýlů.

Dodatek: Z určitého pohledu (nejde chytit $58,\overline{3}$ motýlů, pouze 58 nebo 59) by bylo správnější psát, že musíme chytit 59 motýlů, ale protože výsledek je pouze přibližný (pokud budeme mít 58 motýlů, mohou to být i pouze samičky, poměr je typický, ale nemusí nastat přesně ve všech případech) a proto píšeme číslo 58, které je bližší výsledku dělení.

Pedagogická poznámka: Pokud to jde dobře, bavíme se s žáky, které to zajímá, jaký význam může pro motýla tato změna mít. Sám si ho vysvětluji takto. Za normální situace, mají housenky dostatek potravy a proto je třeba co nejvíce samiček, které kladou vajíčka, ze kterých se líhnou nové housenky. Jeden samec je zřejmě schopen oplodnit více samiček, proto je jejich menší počet dostačují nejen k oplodnění, ale i k vyřazení méně zdatných samečků z rozmnožování.
Na konci kalamity je zřejmé, že velké množství housenek zahyne kvůli nedostatku potravy (kterou si navíc housenky ujídají navzájem) a proto není třeba tolik nakladených vajíček a proto ani samiček. Větší počet samců pak znamená větší konkurenci při hledání samiček a vyřazení většího počtu méně zdatných samečků z rozmnožování (a tím posílení genetického zdraví celé populace.

Pedagogická poznámka: Na řešení následujících dvou příkladu dostanou žáci vytištěné obrázky na papírcích.

Př. 2: Změř úsečky *AB* a *CD* a urči v jakém poměru jsou jejich délky.

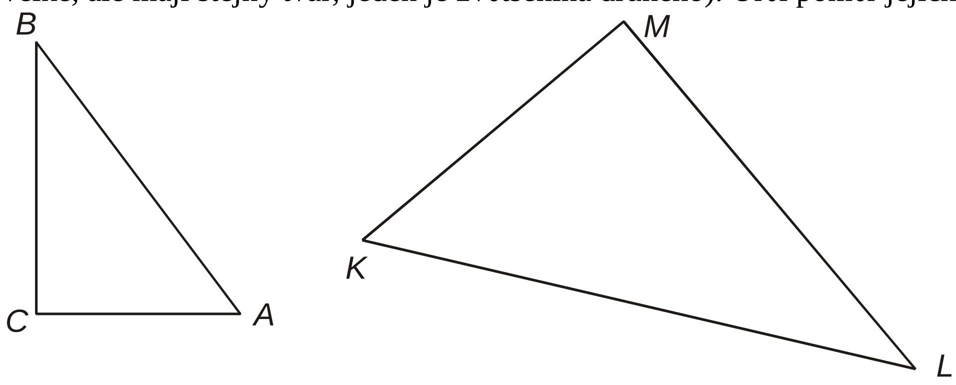
Délky úseček:

- $|AB| = 48\,\text{mm}$,
- $|CD| = 36\,\text{mm}$.

Poměr: $|AB|:|CD| = 48:36 = 8:6 = 4:3$.

Pedagogická poznámka: U trojúhelníků v následujícím příkladu záleží na každém milimetru. Proto je třeba v Corelu (nebo jiném vektorovém programu) upravit nastavení čar tak, aby nevznikaly ostré hrany (prodlužují strany trojúhelníků).

Př. 3: Zkontroluj bez úhloměru, zda jsou si trojúhelníky *ABC* a *KLM* podobné (jsou jinak velké, ale mají stejný tvar, jeden je zvětšenina druhého). Urči poměr jejich velikostí.



Délky stran, které si odpovídají:

- $|AB|:|KL| = 45:75 = 9:15 = 3:5$,
- $|BC|:|LM| = 36:60 = 6:10 = 3:5$,
- $|AC|:|KM| = 27:45 = 3:5$.

Ve všech třech případech je poměr stran, které si odpovídají stejný $3:5$ $\Rightarrow$ trojúhelníky jsou si podobné (trojúhelník *KLM* vznikl zvětšením trojúhelníku *ABC* v poměru $5:3$).

Říkáme, že trojúhelníky *ABC* a *KLM* jsou si podobné v poměru $3:5$.

Př. 4: Trojúhelník *EFG* je s trojúhelníkem *ABC* podobný v poměru $7:9$ (je jeho zmenšeninou). Urči délky stran trojúhelníka *EFG* (hledej nejrychlejší postup). Jaký je poměr velikostí trojúhelníků *EFG* a *KLM*? Je možné tento poměr určit i přímo z poměrů mezi trojúhelníky *EFG* a *ABC* a mezi trojúhelníky *ABC* a *KLM*?

Délka strany *EF* je v poměru $7:9$ s délkou strany *AB* 45 mm.

9 dílů	...	45 mm
1 díl	...	$45:9 = 5$ mm
7 dílů	...	$5 \cdot 7 = 35$ mm

Ve skutečnosti jsme délku strany *AB* vynásobili zlomkem $\frac{7}{9}$ $\Rightarrow$ tento postup budeme používat i u ostatních stran:

- $|EF| = \frac{7}{9} \cdot |AB| = \frac{7}{9} \cdot 45 = 7 \cdot 5 = 35$ mm,
- $|FG| = \frac{7}{9} \cdot |BC| = \frac{7}{9} \cdot 36 = 7 \cdot 4 = 28$ mm,
- $|EG| = \frac{7}{9} \cdot |AC| = \frac{7}{9} \cdot 27 = 7 \cdot 3 = 21$ mm,

Poměr trojúhelníků *EFG* a *KLM*: $\frac{|EF|}{|KL|} = \frac{35}{75} = \frac{7}{15}$ $\Rightarrow$ trojúhelníky jsou v poměru $7:15$.

Zkusíme vyjádření z poměrů: $|EF| = \frac{7}{9} \cdot |AB| = \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{5} \cdot |KL| = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot |KL| = \frac{7}{15} \cdot |KL|$.

Př. 5: Urči poměry $\frac{|AB|}{|AC|}$, $\frac{|KL|}{|KM|}$ a $\frac{|EF|}{|EG|}$. Vysvětli. Najdi další podobné shody.

$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{45}{27}=\frac{5}{3}$, $\frac{|KL|}{|KM|}=\frac{75}{45}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$, $\frac{|EF|}{|EG|}=\frac{35}{21}=\frac{5}{3}$ $\Rightarrow$ všechny poměry jsou stejné. Není to divné, strany *AB*, *KL*, *EF* jsou nejdelší strany a strany *AC*, *KM* a *EG* jsou nejkratší strany všech tří trojúhelníky. Všechny trojúhelníky jsou si podobné (vznikly zvětšováním a zmenšováním trojúhelníku *ABC*), během zvětšování se nemohl změnit poměr stran (zvětšovali jsme je ve stejném poměru) $\Rightarrow$ u všech podobných trojúhelníků musí být poměr nejdelší a nejkratší strany stejný.
Další samozřejmé rovnosti:

- $\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|KL|}{|LM|}=\frac{|EF|}{|FG|}=\frac{\textit{nejdelší strana}}{\textit{prostřední strana}}$,
- $\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|KM|}{|LM|}=\frac{|EG|}{|FG|}=\frac{\textit{nejkratší strana}}{\textit{prostřední strana}}$.

Př. 6: Lívance pro čtyři osoby: 300 g hladké mouky, 0,5 litru mléka, 100 g másla, 2 vejce, 15 g droždí, 50 g cukru, sůl. Rozmícháme, necháme vykynout a pak opečeme.
Petr nalil na mouku mléko a v tom dostal od Veroniky vynadáno. Vždyť jsi tam té mouky nasypal půl kila! Může Petr přípravu lívanců ještě zachránit? Jak? Kolik čeho má do těsta přidat? Urči poměr mezi množstvím lívanců, které chtěl připravit a které nakonec připraví.

Místo 300 g mouky nasypal 500 g $\Rightarrow$ zvětšil množství mouky v poměru $500:300=5:3$ $\Rightarrow$ pokud ve stejném poměru zvýšíme i množství ostatních přísad, připravíme správné těsto (bude ho víc).

Mléko: $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{6}\doteq 0,83$ litru.

Máslo: $100\cdot\frac{5}{3}=\frac{500}{3}\doteq 170$ g .

Vejce: $2\cdot\frac{5}{3}=\frac{10}{3}\doteq 3$ kusy.

Droždí: $15\cdot\frac{5}{3}=25$ g.

Cukr: $50\cdot\frac{5}{3}=\frac{250}{3}\doteq 63$ g.

Množství připravených lívanců bude v poměru 5:3 větší než původně plánované množství.

Shrnutí: Zvětšovat (zmenšovat) můžeme násobením hodnotou poměru.